Chapitre : SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN

Objectifs :

- Savoir définir une similitude directe du plan à partir de la conservation des rapports des distances et des angles orientés.
- Montrer qu'une similitude directe est soit une translation soit la composée d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation de même centre.
- Savoir caractériser une similitude directe (déterminer le vecteur de la translation si c'est une translation ; sinon donner le centre, le rapport et l'angle de la similitude)
- Déterminer l'écriture complexe d'une similitude directe.
- Déterminer une similitude directe par la donnée de l'image (A', B') d'un bipoint (A, B) tels que $AB \neq 0$ et $A'B' \neq 0$.
- Enoncer les effets des similitudes directes sur les configurations et savoir les utiliser dans la résolution de problèmes.

I. COMPOSEE D'UNE HOMOTHETIE DE RAPPORT POSITIF ET D'UNE ROTATION DE MEME CENTRE

1. Activité

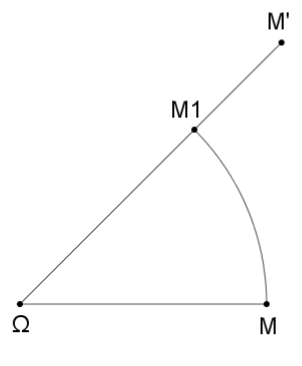
Soit Ω un point du plan, λ un réel strictement positif et θ un réel quelconque.

On désigne par h l'homothétie de centre Ω et de rapport λ, et par r la rotation de même centre Ω et d'angle θ.

Etudier la transformation $h \circ r$.

Corrigé

Pour tout point M du plan, notons $M_1 = r(M)$ et $M' = h(M_1)$.



a. $h[r(\Omega)] = h(\Omega) = \Omega$. Le point Ω est invariant par $h \circ r$.

Pour tout point M distinct de Ω, on a :

$\Omega M = \Omega M_1$; $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M_1}}) = \theta$ et $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M_1}$. Le réel λ étant strictement positif, on en déduit que $\Omega M' = \lambda \Omega M_1$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M_1}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = 0$.

Finalement $\Omega M' = \lambda \Omega M$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta$.

b. Soient M et N deux points du plan.

On a : $M_1N_1 = MN$ et $\overrightarrow{M'N'} = \lambda \overrightarrow{M_1N_1}$.

Le réel λ étant strictement positif, on en déduit que $M'N' = \lambda MN$.

La transformation $h \circ r$ multiplie les distances par λ.

c. Les rotations et les homothéties conservent les angles orientés, donc la composée $h \circ r$ conserve les angles orientés.

d. Pour tout point M du plan, notons $M_2 = h(M)$ et $M'' = r(M_2)$.

$r[h(\Omega)] = r(\Omega) = \Omega$. Le point Ω est invariant par $r \circ h$.

Pour tout point M distinct de Ω, on a :

$\overrightarrow{\Omega M_2} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$; $\Omega M'' = \Omega M_2$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M_2}, \overrightarrow{\Omega M''}}) = \theta$.

On en déduit que $\Omega M'' = \lambda \Omega M$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}}) = \theta$. Donc $M'' = M'$ et par suite $h \circ r = r \circ h$

2. Synthèse

Soit h une homothétie de centre Ω et de rapport λ strictement positif et r une rotation de même centre Ω et d'angle θ.

La composée $h \circ r$ multiplie les distances par λ et conserve les angles orientés.

On dit que $h \circ r$ est une similitude directe du plan.

Remarque : $h \circ r = r \circ h$.

3. Ecriture complexe de $h \circ r$

Désignons par w l'affixe de Ω.

L'écriture complexe de r est : $z \mapsto e^{i\theta}(z - w) + w$.

L'écriture complexe de h est : $z \mapsto \lambda(z - w) + w$.

Donc l'écriture complexe de $h \circ r$ est : $z \mapsto \lambda e^{i\theta}(z - w) + w$; c'est-à-dire

$z' = \lambda e^{i\theta} z + w(1 - \lambda e^{i\theta})$ qui est de la forme $z' = az + b$

avec $a = \lambda e^{i\theta}$ et $b = w(1 - \lambda e^{i\theta})$.

II. SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN

1. Définition

Une similitude directe du plan est une transformation du plan qui multiplie les distances par un réel λ strictement positif et qui conserve les angles orientés.

Le réel λ strictement positif est appelé le rapport de la similitude directe.

Pour tous points A, B, C et D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, d'images respectives A', B', C' et D' par une similitude directe de rapport λ, on a : $A'B' = \lambda AB$ et $(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$.

Exemples

- Une translation est une similitude directe de rapport 1.
- Une rotation est une similitude directe de rapport 1.
- De façon générale, un déplacement est une similitude directe de rapport 1.
- Une homothétie de rapport k $(k \neq 0)$ est une similitude directe de rapport $|k|$.

Théorème

Toute similitude directe de rapport k $(k > 0)$ est la composée d'une homothétie de rapport k et d'un déplacement.

2. Similitudes directes et configurations

- Une similitude directe transforme : un segment en un segment, une droite en une droite, un cercle en un cercle, une conique en une conique de même excentricité.
- Une similitude directe conserve : le parallélisme, l'orthogonalité, le contact, les barycentres.
- Une similitude directe de rapport k $(k > 0)$, multiplie les distances par k et les aires par k^2.

III. TRANSFORMATION DEFINIE PAR : $z \mapsto az + b \quad (a \neq 0)$.

Soient a et b deux nombres complexes tels que $a \neq 0$ et soit f l'application du plan $\wp$ dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az + b$.

- Si $a = 1$, alors $z' = z + b$ et f est la translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, alors f admet un seul point invariant : le point Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.
  On a : $z' = az + b$ et $w = aw + b$ d'où $z' - w = a(z - w) = |a|e^{i\theta}(z - w)$.
  L'application f est donc la composée de l'homothétie de centre Ω , de rapport $|a|$ et de la rotation de même centre Ω et d'angle θ. (θ étant un argument de a).

Retenons

La transformation f dont une écriture complexe est de la forme : $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, est une similitude directe du plan :

- Si $a = 1$, alors f est la translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, alors f est la similitude directe de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$ et d'angle θ. (θ étant un argument de a). On dit alors que f est une similitude à centre.

Dans ce cas f peut s'écrire $f = h \circ r = r \circ h$ où h est une homothétie et r une rotation de même centre que h. On dit alors que $h \circ r$ est la forme réduite de f.

Exercice d'application

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit g l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (1 + i)z + 2i$.

a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.
b) Donner la forme réduite de g.

Corrigé

a) On a : $z' = z \Leftrightarrow (1 + i)z + 2i = z \Leftrightarrow z = -2$; $|1 + i| = \sqrt{2}$ et
$\arg(1 + i) \equiv \frac{\pi}{4} \ [2\pi]$.

g est la similitude directe dont le centre Ω a pour affixe -2, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

b) Soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\sqrt{2}$.

La forme réduite de g est : $g = h \circ r$.

Propriété

Soit f une similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ.

Pour tout point M et M' du plan distincts de Ω, on a : $M' = f(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \end{cases}$.

IV. DETERMINATION D'UNE SIMILITUDE DIRECTE PAR LA DONNEE DE L'IMAGE (A',B') D'UN BIPOINT (A,B) TEL QUE AB$\neq 0$ ET A'B' $\neq 0$.

1. Théorème (admis)

Etant donné quatre points A, B, A' et B' tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, il existe une similitude directe f et une seule telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$. Le rapport de f est $\frac{A'B'}{AB}$ et son angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$.

Remarques

- Si $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ alors f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.
- Si $\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}$ ($k \neq 1$), alors f est une homothétie.
- Si $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$ et $A'B' = AB$ alors f est une rotation.

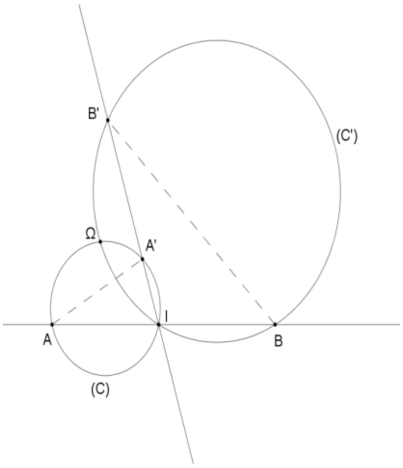
2. Construction du centre Ω d'une similitude directe dans le cas général

On se situe dans le cas où f n'est ni une homothétie, ni une translation.

f est la similitude directe de rapport $\frac{A'B'}{AB}$ d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$ et de centre son unique point invariant.

Désignons par I le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$.

- Cas où le point I est distinct des points A, B, A' et B'.



On a : $2(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A'B'}}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{IA}}, \overrightarrow{\mathrm{IA'}}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{IB}}, \overrightarrow{\mathrm{IB'}}})$; or $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A'B'}}}) = (\widehat{\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{A'}}}) = (\widehat{\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{B'}}})$ donc :

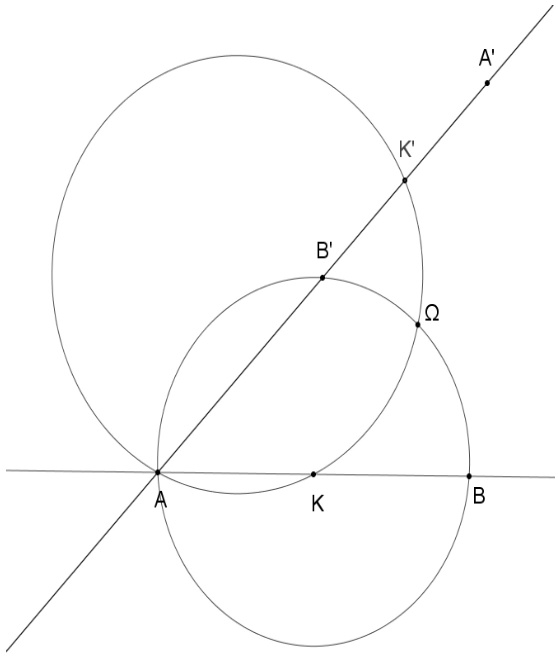
d'une part $2(\widehat{\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{A'}}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{IA}}, \overrightarrow{\mathrm{IA'}}})$ et les points Ω, I, A et A' sont cocycliques et

d'autre part $2(\widehat{\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{B'}}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{IB}}, \overrightarrow{\mathrm{IB'}}})$ et les points Ω, I, B et B' sont cocycliques.

On en déduit que Ω appartient aux cercles (C) et (C') circonscrits respectivement aux triangles IAA' et IBB'. Ces deux cercles ayant le point I en commun, sont soit tangents en I soit sécants.

- Si (C) et (C') sont tangents alors $\Omega = I$.
- (C) et (C') sont sécants en I et J alors $\Omega = J$. (En effet, si Ω était en I, les droites (AA') et (BB') seraient parallèles ; (C') serait l'image de (C) par une homothétie de centre I. (C) et (C') seraient tangents.)

- Cas où le point I est l'un des points A, B, A' et B' (par exemple $I = A$)



On construit le milieu K du segment $[AB]$ et le point $K' = f(K)$. On a K' qui est le milieu de $[A'B']$.

On retrouve la situation précédente avec $(KB) \cap (K'B') = \{A\}$. Ω est le point d'intersection, autre que A, des cercles circonscrits aux triangles AKK' et ABB'.

V. TRANSFORMATION VECTORIELLE ASSOCIEE A UNE SIMILITUDE DIRECTE DU PLAN

1. Définition

Soit f une similitude directe du plan de rapport k et d'angle θ.

L'application φ de $\vec{\wp}$ dans $\vec{\wp}$ qui au vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ associe le vecteur $\varphi(\vec{v})$= $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{A'B'}$ où $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$ est appelée similitude directe vectorielle associée à f.

Remarque

- $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$.
- Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors le vecteur $\overrightarrow{v'} = \varphi(\vec{v})$ est caractérisé par : $\left\|\overrightarrow{v'}\right\| = k\|\vec{v}\|$ et $(\widehat{\vec{v}, \overrightarrow{v'}}) \equiv \theta\ [2\pi]$.

L'application φ est appelée similitude directe vectorielle de rapport k et d'angle θ.

2. Linéarité

Soit φ la similitude vectorielle associée à une similitude directe f.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tout réel λ,

On a : $\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$ et $\varphi(\lambda\vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{v})$. On dit que φ est linéaire.

<u>Démonstration</u>

Soient A, B, C et D les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD} = \lambda\overrightarrow{BC} = \lambda\vec{v}$.

Désignons par A', B', C' et D' les images respectives des points A, B, C et D par f.

On a : $\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right) = \varphi\left(\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$

$$= \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) + \varphi\left(\overrightarrow{BC}\right) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}).$$

On a : $\varphi(\lambda\vec{v}) = \varphi\left(\lambda\overrightarrow{BC}\right) = \varphi\left(\overrightarrow{BD}\right) = \overrightarrow{B'D'}$. Or $\overrightarrow{BD} = \lambda\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{B'D'} = \lambda\overrightarrow{B'C'}$ (conservation du barycentre). Donc $\varphi(\lambda\vec{v}) = \lambda\overrightarrow{B'C'} = \lambda\varphi\left(\overrightarrow{BC}\right) = \lambda\varphi(\vec{v})$.

<u>EXERCICES</u>

<u>Exercice1</u>

Dans un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ du plan P, on donne les points $A\left(\frac{3}{2};0\right)$ et $B(1;-1)$. On considère l'application s de P dans P qui, à tout point M, associe le point M' ainsi défini : M_1 est l'image de M par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et M' est l'image de M_1 par l'homothétie de centre B et de rapport 3.

1) Le plan P étant identifié à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on note z l'affixe de M et z' celle de M'. Exprimer z' en fonction de z.
2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de s.

<u>Exercice2</u>

Le plan P est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On note z l'affixe d'un point M de ce plan

1) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $|(1+i)z - 2i| = 2$.
2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f de P, qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = (1+i)z - 2i$.
3) En utilisant la transformation f, retrouver le résultat de la première question.

Exercice3

$ABCD$ est un rectangle de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{6}$. On note E le symétrique de A par rapport à D. Soit s la similitude directe de centre C, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1) a) Montrer que $s(A) = B$

   b) Montrer que le triangle ACE est équilatéral et en déduire que $s(E) = O$.

2) Soit I un point du segment $[OE]$, distinct des points O et E et soit (Γ) le cercle de centre I et passant par A. Les droites (AD) et (AB) recoupent le cercle (Γ) respectivement en M et P.

   a) Tracer (Γ) et placer les points M et P.

   b) Montrer que le point C appartient au cercle (Γ).

3) Soit N le projeté orthogonal de C sur la droite (MP).

   a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}}) = \frac{\pi}{6}$.

   b) En déduire que $s(M) = N$.

4) Montrer que les points B, D et N sont alignés.

Exercice4

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On note s la similitude plane directe de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et qui laisse invariant le point $I(0;4)$.

1) Déterminer l'écriture complexe de s.

2) Soit M_0 le point d'affixe $2+3i$. On pose pour tout entier naturel n,

   $M_{n+1} = s(M_n)$ et $u_n = IM_n$.

   a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

   b) Exprimer u_n en fonction de n et étudier sa limite.

3) On pose $L_n = IM_1 + IM_2 + \cdots + IM_n$. Calculer L_n en fonction de n.

Exercice5

Soit r un nombre réel strictement positif, u le nombre complexe de module r et d'argument $-\frac{3\pi}{4}$.

1) On considère la suite (A_n) de points définie par :

- $A_0 = O$.

- L'affixe de A_1 est i.
- Pour tout entier naturel n non nul et distinct de 1, A_n est l'image de A_{n-2} par la similitude directe de centre A_{n-1}, de rapport r et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$.

On désigne par z_n l'affixe de A_n.

a) Ecrire pour tout entier naturel n non nul et distinct de 1, une relation entre z_n, z_{n-1} et z_{n-2}.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul et distinct de 1, on a : $z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1}i$.

2) a) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe s, qui transforme A_0 en A_1 et A_1 en A_2.

b) Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = s(A_n)$.

Chapitre : SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN

Leçon: I. NOTIONS DE BASE SUR LES SIMILITUDES DIRECTES.

Objectifs (oralement) : A la fin de cette leçon :

- L'élève doit savoir définir une similitude directe du plan à partir de la conservation des rapports des distances et des angles orientés.
- L'élève doit être capable de déterminer l'écriture complexe de la composée d'une homothétie de rapport strictement positif et d'une rotation de même centre.

1. composée d'une homothétie de rapport strictement positif et d'une rotation de même centre

Activité

Soit Ω un point du plan, λ un réel strictement positif et θ un réel non nul.

On considère h l'homothétie de centre Ω , de rapport λ, et r la rotation de même centre Ω et d'angle de mesure θ.

a) Comparer $h \circ r$ et $r \circ h$.

b) Soient M et N deux points distincts du plan d'images respectives M' et N' par $h \circ r$. Comparer MN et $M'N'$.

c) Comparer les angles $(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'Q'}})$ où M, N, P et Q sont des points avec $M \neq N$, $P \neq Q$ et M', N', P' et Q' leurs images respectives par $h \circ r$.

d) Donner l'écriture complexe de $h \circ r$ dans un repère orthonormal direct.

Corrigé

a) Soit M un point du plan. Notons $M_1 = r(M)$, $M' = h(M_1)$ et notons $M_2 = h(M)$, $M'' = r(M_1)$.

On a $h \circ r(M) = M'$ et $r \circ h(M) = M''$

- Si $M = \Omega$ alors $M' = M'' = \Omega$
- Si $M \neq \Omega$ alors on a d'une part,

  $\Omega M = \Omega M_1$; $(\widehat{\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}}, \overrightarrow{\Omega M_1}}) = \theta$ et $\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M_1}$. Le réel λ étant strictement positif, on en déduit que $\Omega M' = \lambda \Omega M_1$ et

  $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M_1}, \overrightarrow{\Omega \mathrm{M}'}}) = 0$ donc

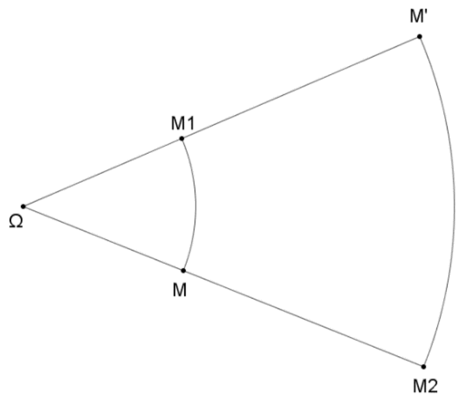
  $\Omega M' = \lambda \Omega M$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}}, \overrightarrow{\Omega \mathrm{M}'}}) = \theta$.

  D'autre part $\overrightarrow{\Omega M_2} = \lambda \overrightarrow{\Omega \mathrm{M}}$; $\Omega M'' = \Omega M_2$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M_2}, \overrightarrow{\Omega \mathrm{M}''}}) = \theta$.

  On en déduit que $\Omega M'' = \lambda \Omega M$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}}, \overrightarrow{\Omega \mathrm{M}''}}) = \theta$.

  On a : $\Omega M' = \lambda \Omega M$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}}, \overrightarrow{\Omega \mathrm{M}'}}) = \theta$ et $\Omega M'' = \lambda \Omega M$ et

  $(\widehat{\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}}, \overrightarrow{\Omega \mathrm{M}''}}) = \theta$ donc $M'' = M'$ et par suite $h \circ r = r \circ h$.



b) Soient M et N deux points du plan. Notons $M_1 = r(M)$, $M' = h(M_1)$,
$N_1 = r(N)$, $N' = h(N_1)$. On a $h \circ r(M) = M'$ et $h \circ r(N) = N'$

On a : $M_1N_1 = MN$ et $\overrightarrow{M'N'} = \lambda\overrightarrow{M_1N_1} \Rightarrow M'N' = \lambda M_1N_1$ et par suite $M'N' = \lambda MN$.

La transformation $h \circ r$ multiplie les distances par λ.

c) Soient M, N, P et Q des points du plan avec $M \neq N$, $P \neq Q$.
Notons $M_1 = r(M)$, $N_1 = r(N)$, $P_1 = r(P)$, $Q_1 = r(Q)$ et $M' = h(M_1)$, $N' = h(N_1)$, $P' = h(P_1)$, $Q' = h(Q_1)$. On a donc $M' = h \circ r(M)$,
$N' = h \circ r(N)$, $P' = h \circ r(P)$ et $Q' = h \circ r(Q)$.
D'après les propriétés caractéristiques d'une rotation et d'une homothétie, $\left(\widehat{\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{P_1Q_1}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}}\right)$ et $\overrightarrow{M'N'} = \lambda\overrightarrow{M_1N_1}$; $\overrightarrow{P'Q'} = \lambda\overrightarrow{P_1Q_1}$

Comme $\lambda > 0$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{P_1Q_1}}\right) = \left(\widehat{\lambda\overrightarrow{M_1N_1}, \lambda\overrightarrow{P_1Q_1}}\right)$ et par suite $\left(\widehat{\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'Q'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}}\right)$.

La transformation $h \circ r$ conserve les angles orientés.

d) Désignons par w l'affixe de Ω. Notons z l'affixe de M ; z_1 l'affixe de M_1 et z' l'affixe de M'.
On a : $M_1 = r(M) \Leftrightarrow z_1 = e^{i\theta}(z - w) + w$

et $M' = h(M_1) \Leftrightarrow z' = \lambda(z_1 - w) + w$.

Donc l'écriture complexe de $h \circ r$ est : $z' = \lambda e^{i\theta}(z - w) + w$; c'est-à-dire

$z' = \lambda e^{i\theta} z + w(1 - \lambda e^{i\theta})$ qui est de la forme $z' = az + b$

avec $a = \lambda e^{i\theta}$ et $b = w(1 - \lambda e^{i\theta})$.

Synthèse

Soit h une homothétie de centre Ω, de rapport λ strictement positif et r une rotation de même centre Ω et d'angle θ.

- On a : $h \circ r = r \circ h$.
- La composée $h \circ r$ multiplie les distances par λ et conserve les angles orientés.
- Désignons par w l'affixe de Ω.

  L'écriture complexe de $h \circ r$ est : $z' = \lambda e^{i\theta}(z - w) + w$; c'est-à-dire

  $z' = \lambda e^{i\theta} z + w(1 - \lambda e^{i\theta})$ qui est de la forme $z' = az + b$ où a et b sont des nombres complexes avec a non nul.

2. Définition

Une similitude directe du plan est une transformation du plan qui multiplie les distances par un réel λ strictement positif et qui conserve les angles orientés.

Autrement dit :pour tous points A, B, C et D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, d'images respectives A', B', C' et D' par une similitude directe de rapport λ, on a : $A'B' = \lambda AB$ et $(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$.

Le réel λ strictement positif est appelé le rapport de la similitude directe.

Exemples

- Une translation est une similitude directe de rapport 1.
- Une rotation est une similitude directe de rapport 1.
- De façon générale, un déplacement est une similitude directe de rapport 1.
- Une homothétie de rapport k $(k \neq 0)$ est une similitude directe de rapport $|k|$.

3. Ecriture complexe de $h \circ r$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit Ω un point du plan d'affixe w, λ un réel strictement positif et θ un réel quelconque.

Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport λ et soit r la rotation de centre Ω et d'angle θ.

L'écriture complexe de la composée $h \circ r$ est $z' = az + b$ où a et b sont des nombres complexes avec a non nul.

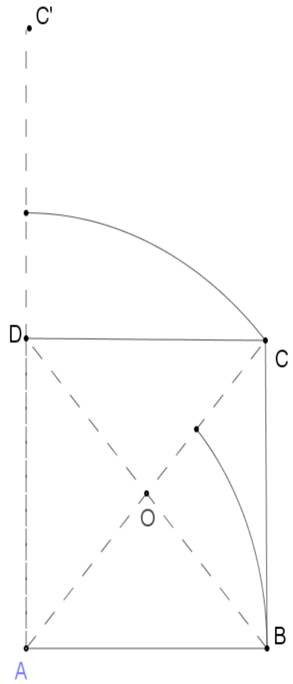
Exercice d'application

Soit $ABCD$ un carré de sens direct et de centre O ; h est l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$; r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$; on note $f = h \circ r$.

a) Construire les images des points A, B et C par f.
b) Déterminer l'écriture complexe de f dans le repère orthonormal direct d'origine O tel que A ait pour affixe $1 + i$.

Corrigé

a) Soit $A' = f(A) = A$; $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$.



b) Soit M un point d'affixe . Désignons par M_1 d'affixe z_1 l'image de M par r et par M' d'affixe z' l'image de M_1 par h. On a $M' = f(M)$.

On a : $z' = az + b$ avec $a = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$ et $b = (1+i)\left(1 - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = 1 - i$

L'écriture complexe de f est : $z' = (1+i)z + 1 - i$.

<u>Exercice à faire à la maison.</u>

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soit f l'application du plan dans lui-même définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}.$$

1) Déterminer l'écriture complexe de f.

2) Ecrire f comme composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre.

Corrigé

1) Soit M d'affixe $z = x + iy$ et $M' = f(M)$ d'affixe $z' = x' + iy$.

   On a : $z' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + i(x\sqrt{3} + y - \sqrt{3}) = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + ix\sqrt{3} + iy - i\sqrt{3}$. $z' = x + iy + i\sqrt{3}(x + iy) + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3} = z + i\sqrt{3}z + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

   $z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$.

   L'écriture complexe de f est $z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$.

2) Désignons par Ω d'affixe w le centre commun à l'homothétie et à la rotation.

   $f(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow (1 + i\sqrt{3})w + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3} = w \Leftrightarrow \mathrm{w} = 1 + 2i$.

   $$z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3} \Leftrightarrow \mathrm{z}' - \mathrm{w} = (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3} - 1 - 2i$$

   $$\Leftrightarrow \mathrm{z}' - \mathrm{w} = (1 + i\sqrt{3})z - (1 + 2i) - i\sqrt{3}(1 + 2i)$$

   $$\Leftrightarrow \mathrm{z}' - \mathrm{w} = (1 + i\sqrt{3})z - (1 + 2i)(1 + i\sqrt{3})$$

   $$\Leftrightarrow \mathrm{z}' - \mathrm{w} = (1 + i\sqrt{3})[z - (1 + 2i)]$$

   $$\Leftrightarrow \mathrm{z}' - \mathrm{w} = (1 + i\sqrt{3})(z - w)$$

   $$\Leftrightarrow \mathrm{z}' = (1 + i\sqrt{3})(z - w) + w$$

   $|1 + i\sqrt{3}| = 2$ et un argument de $1 + i\sqrt{3}$ est $\frac{\pi}{3}$, donc $z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - w) + w$.

   Considérons l'homothétie h de centre Ω, de rapport 2 et la rotation r de centre Ω, d'angle $\frac{\pi}{3}$.

   On a : $f = h \circ r$.

PROPOSITION DE CORRIGES DES EXERCICES EN FIN DE CHAPITRE

Exercice1

1) Exprimons z' en fonction de z.

On a : $r(M) = M_1 \Leftrightarrow z_1 = i(z - z_A) + z_A = i\left(z - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$ et

$h(M_1) = M' \Leftrightarrow z' = 3(z_1 - z_B) + z_B = 3(z_1 - 1 + i) + 1 - i$, donc

$z' = 3\left[i\left(z - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} - 1 + i\right] + 1 - i = 3iz + \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i.$

$z' = 3iz + \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i.$

2) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de s.

On a : $z' = az + b$ avec $a = 3i$ donc s est une similitude plane directe.

$z' = z \Leftrightarrow 3iz + \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i = z \Leftrightarrow z = 1 + \frac{1}{2}i$; $|3i| = 3$ et un argument de $3i$ est $\frac{\pi}{2}$.

La transformation s est la similitude plane directe de centre le point d'affixe $1 + \frac{1}{2}i$, de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice2

1) Déterminons l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que: $|(1+i)z - 2i| = 2$.
   On a : $(1+i)z - 2i = (1+i)\left(z - \frac{2i}{1+i}\right) = (1+i)[z - (1+i)]$; donc
   $|(1+i)z - 2i| = \sqrt{2}AM$ où A est le point d'affixe$1 + i$ et
   $|(1+i)z - 2i| = 2 \Leftrightarrow AM = \sqrt{2}$.
   L'ensemble (Γ) est le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
2) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.
   $z' = (1+i)z - 2i.$

$z' = z \Leftrightarrow z = 2$; $|1+i| = \sqrt{2}$ et un argument de $1+i$ est $\frac{\pi}{4}$.

La transformation f est similitude plane directe de centre le point Ω d'affixe 2, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

3) En utilisant la transformation f, retrouvons le résultat de la première question.

On a $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow |z'| = 2 \Leftrightarrow OM' = 2 \Leftrightarrow M'$ appartient au cercle (C') de centre O et de rayon 2. (Γ) est donc l'image de (C') par la réciproque f^{-1} de f.

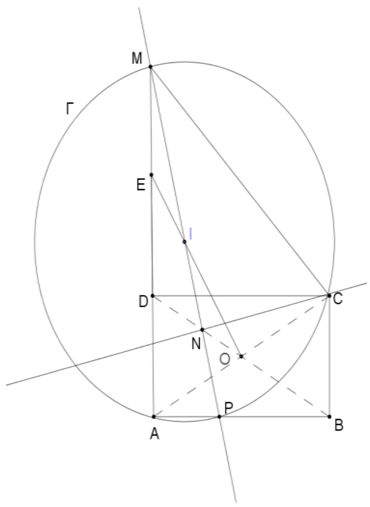
La réciproque f^{-1} de f est la similitude plane directe de centre Ω, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

L'image du cercle (C') par f^{-1} est donc le cercle de centre $f^{-1}(O)$ et de rayon $R = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

L'affixe de $f^{-1}(O)$ est solution de l'équation $(1+i)z - 2i = 0 \Leftrightarrow z = 1+i$.

L'ensemble (Γ) est le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

<u>Exercice3</u>



1) a) Montrons que $s(A) = B$

On a $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{3}$ et dans le triangle rectangle , $cos(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = \frac{CB}{CA}$, or $cos(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ donc $CB = \frac{1}{2}CA$.

$(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{3}$ et $CB = \frac{1}{2}CA$ nous dit que $s(A) = B$.

b) Montrons que le triangle ACE est équilatéral et déduisons-en que $s(E) = O$.
On a : $AE = 2AD = 2BC = AC$. La droite (DC) est médiatrice du segment $[AE]$, donc $CE = AC$. Finalement $AE = CE = AC$ donc le triangle ACE est équilatéral.

$(\widehat{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CO}}) = \frac{\pi}{3}$ et $CO = \frac{1}{2}CE$ donc $s(E) = O$.

2) a) Traçons (Γ) et plaçons les points M et P. (voir figure)
b) Montrons que le point C appartient au cercle (Γ).
La droite (OE) est médiatrice de du segment $[AC]$. Comme $I \in [OE]$ alors $IA = IC$, or IA est un rayon de (Γ) donc le point C appartient au cercle (Γ).

3) Soit N le projeté orthogonal de C sur la droite (MP).
a) Montrons que $(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}}) = \frac{\pi}{6}$.
Les angles $(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AC}})$ sont deux angles inscrits dans le cercle (Γ) et qui interceptent le même arc $\widehat{PC}$ donc $(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}}) = (\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{6}$.
b) Montrons que $s(M) = N$.
Le triangle MNC est rectangle en N et de sens direct. Comme $(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MC}}) = \frac{\pi}{6}$ alors $(\widehat{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}}) = \frac{\pi}{3}$. De plus $(\widehat{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}}) = \frac{CN}{CM}$, or $cos(\widehat{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}}) = cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ donc $CN = \frac{1}{2}CM$.Il vient alors que $s(M) = N$.

4) Montrons que les points B, D et N sont alignés.
On a : $s(A) = B$; $s(E) = O$. Comme $M \in (AE)$ alors $s(M) = N$ appartient à (OB) car les similitudes directes du plan conservent l'alignement. Or $(OB) = (BD)$. Donc les points B, D et N sont alignés.

Exercice4

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On note s la similitude plane directe de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et qui laisse invariant le point $I(0; 4)$.

1) Déterminons l'écriture complexe de s.

On a : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-4i)+4i = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z+2+2i$

$z' = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z+2+2i$

2) Soit M_0 le point d'affixe $2+3i$. On pose pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = s(M_n)$ et $u_n = IM_n$.

a) Nature de la suite (u_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = IM_{n+1} = s(I)s(M_n) = \frac{\sqrt{2}}{2}IM_n = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n$, donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $u_0 = IM_0 = \sqrt{5}$.

b) Exprimons u_n en fonction de n et étudier sa limite.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0q^n$. Donc $u_n = \sqrt{5}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ car $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1$.

3) Calculons L_n en fonction de n.

On a : $L_n = IM_1 + IM_2 + \cdots + IM_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_n.\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$

$$L_n = \frac{\sqrt{10}}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right].$$

<u>Exercice5</u>

1) a) Ecrivons une relation entre z_n, z_{n-1} et z_{n-2}.

$(\widehat{\overrightarrow{A_{n-1}A_{n-2}}, \overrightarrow{A_{n-1}A_n}}) = -\frac{3\pi}{4}$ et $A_{n-1}A_n = r\, A_{n-1}A_{n-2}$ donc

$z_n - z_{n-1} = re^{-i\frac{3\pi}{4}}(\, z_{n-2} - z_{n-1}) = u(\, z_{n-2} - z_{n-1})$

$z_n - z_{n-1} = -\,u(\, z_{n-1} - z_{n-2})$

b) Démontrons que pour tout entier naturel n non nul et distinct de 1, on a :

$z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1}i$.

On a : $z_2 - z_1 = -\,u(\, z_1 - z_0) = (-u)i$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Supposons que $z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1}i$.

On alors $z_{n+1} - z_n = -\,u(\, z_n - z_{n-1}) = (-u)(-u)^{n-1}i = (-u)^n i$.

Donc : $\forall\, n \geq 2$, $z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1}i$.

2) a) Déterminons les éléments caractéristiques de la similitude directe s, qui transforme A_0 en A_1 et A_1 en A_2.

Le rapport de s est $\frac{A_1A_2}{A_0A_1}$, son angle $(\widehat{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_1A_2}})$. On a : $\frac{z_2-z_1}{z_1-z_0} = \frac{-iu}{i} = -u$

$\left|\frac{z_2-z_1}{z_1-z_0}\right| = |-u| = r$ et arg $(\frac{z_2-z_1}{z_1-z_0})$ =arg$(-u)$= $\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

Soit Ω d'affixe w le centre de s. On a : $z_1 - w = re^{i\frac{\pi}{4}}(z_0 - w) \Leftrightarrow w = \frac{i}{1-re^{i\frac{\pi}{4}}}$.

La similitude directe s a pour centre Ω d'affixe $w = \frac{i}{1-re^{i\frac{\pi}{4}}}$; pour rapport r et pour angle $\frac{\pi}{4}$.

b) Démontrons que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} = s(A_n)$.

On a : $\forall\, n \geq 2,\ z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1}i$ et $z_1 - z_0 = i$ donc $z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1}i$

En additionnant membre à membre les égalités $z_1 - z_0 = i$ et $z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1}i$ pour n allant de 2 à n et en simplifiant on obtient $\forall\, n \geq 0,\ z_n = i\left[\frac{1-(-u)^n}{1+u}\right]$.

Par hypothèse $A_1 = s(A_0)$. Posons $B = s(A_n)$ et notons Z l'affixe de B.

On a alors $Z - w = re^{i\frac{\pi}{4}}(z_n - w) \Leftrightarrow Z = re^{i\frac{\pi}{4}}z_n + w\left(1 - re^{i\frac{\pi}{4}}\right)$. Comme $w = \frac{i}{1-re^{i\frac{\pi}{4}}}$, alors $Z = re^{i\frac{\pi}{4}}z_n + i$.. On a : $u = re^{-i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow r = ue^{i\frac{3\pi}{4}}$. Donc $Z = ue^{i\frac{3\pi}{4}}.e^{i\frac{\pi}{4}}.i\left[\frac{1-(-u)^n}{1+u}\right] + i = -ui\left[\frac{1-(-u)^n}{1+u}\right] + i = i\left[1 - \frac{u(1-(-u)^n)}{1+u}\right] = i\left[\frac{1-(-u)^{n+1}}{1+u}\right]$.

On a : $Z = z_{n+1}$, donc $B = A_{n+1}$ c'est-à-dire $A_{n+1} = s(A_n)$.